ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ

5 Σεπτεμβρίου 2016

Θέμα 1. [0.5+0.5] Υπολογίστε, αν υπάρχουν, τα ακόλουθα όρια, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} \qquad \text{και} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(xy)-1}{x^2y^2}.$$

Θέμα 2. [1] Αποδείξτε ότι το υποσύνολο $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ του $\mathbb{R}^2$ είναι ανοικτό.

Θέμα 3. [0.8+0.8+0.4] Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \begin{cases} |x|, & \text{αν } y = 0, \\ |y|, & \text{αν } x = 0, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Εξετάστε αν η f είναι συνεχής στα σημεία

$$(\alpha') \quad (x_0, 0) \text{ με } x_0 \neq 0 \qquad \text{και} \qquad (\beta') \quad (0,0)$$

και προσδιορίστε (αν, όποιες και όπου υπάρχουν) τις μερικές παραγώγους, την κλίση, την παράγωγο και τις παραγώγους κατά κατεύθυνση της f στα σημεία αυτά.

Κατά αναλογία με τα αποτελέσματά σας στην περίπτωση (α′), περιγράψτε τι συμβαίνει σχετικά στα σημεία $(0, y_0)$ με $y_0 \neq 0$.

Θέμα 4. [0.3+0.7] Βρείτε το σύνολο στάθμης $r^2 > 0$ της $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, και δείξτε ότι η κλίση της g είναι σε κάθε σημείο του κάθετη στο σύνολο αυτό.

Θέμα 5. [0.8] Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και έστω ότι η $\bar{f} : U \to \bar{f}(U) \subset \mathbb{R}^n$ είναι $1-1$ και C^1 με $\det D\bar{f}(\bar{x}) \neq 0 \ \forall \ \bar{x} \in U$ και C^1 αντίστροφη. Δείξτε ότι $D(\bar{f}^{-1})(\bar{f}(\bar{x})) = (D\bar{f}(\bar{x}))^{-1} \ \forall \ \bar{x} \in U$.

Θέμα 6. [2+0.5]

(α′) Έστω $U \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $u \in C^2(U)$ με

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) > 0 \qquad \forall \ (x,y) \in U. \tag{1}$$

Δείξτε ότι η u δεν έχει τοπικά μέγιστα.

(β′) Δώστε ένα παράδειγμα μιας συνάρτησης με την ιδιότητα (1) και επαληθεύστε ότι για τη συνάρτηση αυτή ισχύει η προηγούμενη πρόταση.

Θέμα 7. [0.7] Βρείτε το σημείο του επιπέδου $x - y + z = 1$ που βρίσκεται κοντύτερα στην αρχή των αξόνων.

Θέμα 8. [1] Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $\bar{x} \in U$ και $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^m$ διαφορίσιμη στο $\bar{x}$. Προσδιορίστε ρητά ένα $V \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό με $\bar{0} \in V$, ένα σημείο $\bar{a} \in \mathbb{R}^m$, έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και μια συνάρτηση $\bar{g} : V \to \mathbb{R}^m$, έτσι ώστε

$$\bar{f}(\bar{x} + \bar{y}) = \bar{a} + A\bar{y} + \bar{g}(\bar{y}) \quad \forall \ \bar{y} \in V \qquad \text{με} \qquad \lim_{\bar{y}\to\bar{0}} \frac{\bar{g}(\bar{y})}{\|\bar{y}\|} = \bar{0}.$$